

где  $w_c$  и  $v_c$  — статические прогибы балки вдоль вертикальной и горизонтальной поперечной осей, вызванные собственным весом уголка, в соответствующем сечении,

$\eta_v(x)$ ,  $\eta_r(x)$  — текущие ординаты геометрических неровностей путевой структуры в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Таким образом, исследование динамики системы «экиваж — путевая структура — система автоматического управления» сводится к решению системы дифференциальных уравнений (11), (8), (15) с учетом уравнений связей между ними (17). Решение этих дифференциальных уравнений осуществляется методами численного интегрирования с помощью ЭЦВМ. Исследование устойчивости решений этой системы может быть выполнено также численными методами или с использованием первого приближения Ляпунова путем решения полной проблемы собственных значений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарян В. А. Динамика вагонов. Устойчивость движения и колебания. — М.: Транспорт, 1964, — 256 с.
2. Лазарян В. А. и Конашненко С. И. Обобщенные функции в задачах механики. — Киев: Наукова думка, 1974. — 192 с. — Днепропетр. отделение ин-та механики.

---

УДК 629.439.015

*Н. Г. Попович, В. В. Дубов, В. А. Гаврилюк, В. И. Теряев*

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МНОГОТОЧЕЧНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОДВЕСА ПЛАТФОРМЫ ТРАНСПОРТНОГО ЭКИПАЖА

Приводятся результаты исследований нормальных и аварийных режимов работы многоточечного электромагнитного подвеса с учетом перекрестных связей между локальными системами автоматического регулирования зазоров электромагнитов.

Исследованиям динамики электромагнитного подвеса посвящено много работ. Однако в большинстве из них, например, [1, 2, 3, 4, 5, 6], рассматривается однотоочечный электромагнитный подвес. Математическое описание объекта регули-



рования — платформы транспортного экипажа — дано в [7, 8, 9]. Однако, динамика системы подвеса исследована не была.

В настоящей работе приводятся результаты исследований нормальных и аварийных режимов работы многоточечного электромагнитного подвеса платформы транспортного экипажа с учетом перекрестных связей между локальными системами автоматического регулирования зазоров электромагнитов через общий объект регулирования для различного числа и расположения точек подвеса.

## 1. Математическое описание объекта регулирования

Рассматривая платформу транспортного экипажа как свободное твердое тело, воспользуемся для описания ее движения динамическими уравнениями Эйлера и теоремой о движении центра масс.

Обозначим на рис. 1 оси  $x, y, z$  основной системы отсчета и проведем через центр масс  $C$  оси  $x_1, y_1, z_1$ , параллельные

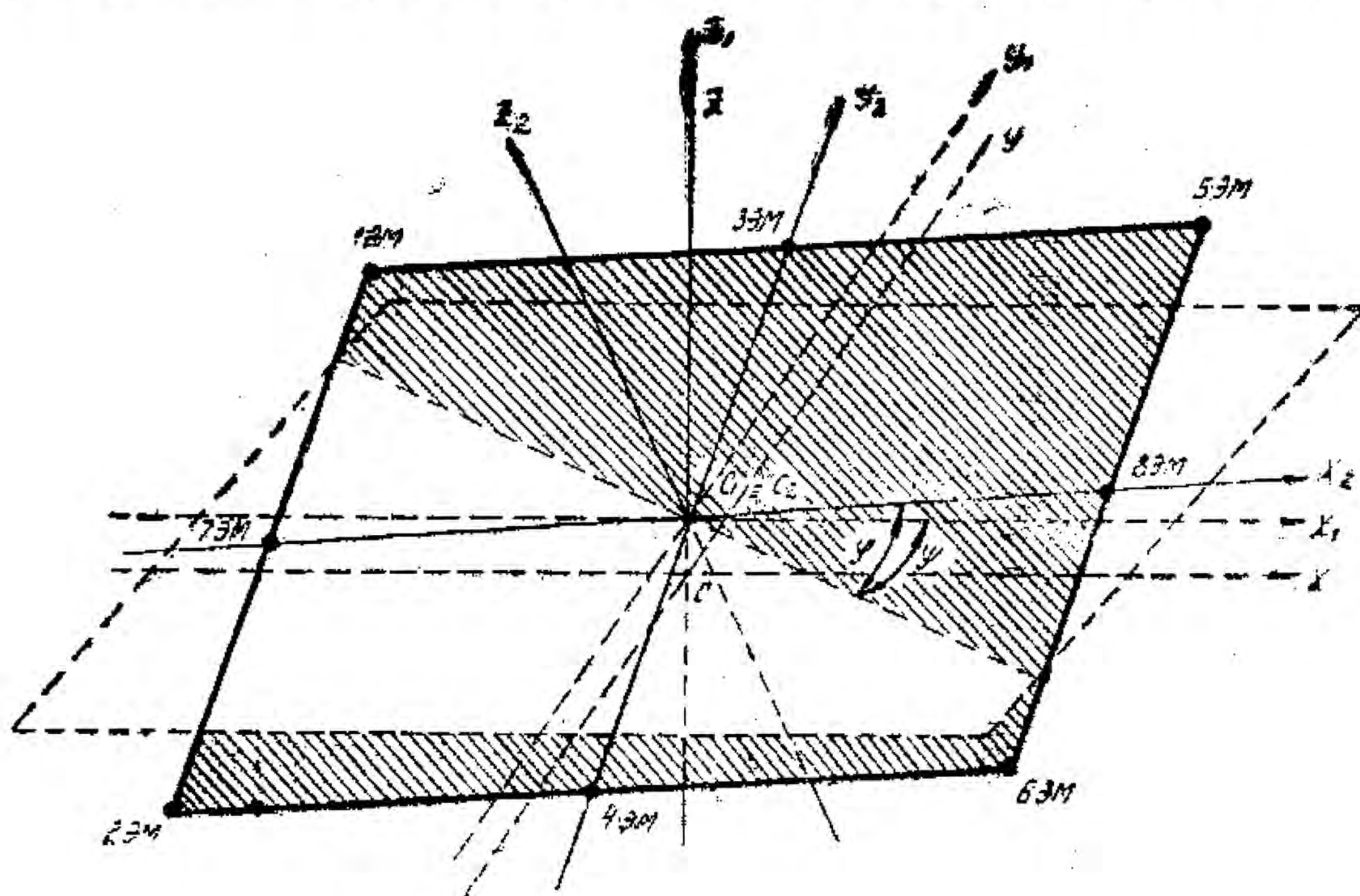


Рис. 1. Схема платформы транспортного экипажа

осям основной системы, а также подвижные оси  $x_2, y_2, z_2$ , связанные с телом и направленные по главным осям инерции тела. Тогда уравнения движения центра масс и динамические уравнения Эйлера можно представить в виде:



$$m \cdot d^2 x_c / dt^2 = \sum F_{kx}^e; \quad (1)$$

$$m \cdot d^2 y_c / dt^2 = \sum F_{ky}^e; \quad (2)$$

$$m \cdot d^2 z_c / dt^2 = \sum F_{kz}^e; \quad (3)$$

$$\dot{J}_{x_2} \cdot d\omega_{x_2} / dt + (\dot{J}_{z_2} - \dot{J}_{y_2}) \cdot \omega_{y_2} \cdot \omega_{z_2} = M_{x_2}^e; \quad (4)$$

$$\dot{J}_{y_2} \cdot d\omega_{y_2} / dt + (\dot{J}_{x_2} - \dot{J}_{z_2}) \cdot \omega_{z_2} \cdot \omega_{x_2} = M_{y_2}^e; \quad (5)$$

$$\dot{J}_{z_2} \cdot d\omega_{z_2} / dt + (\dot{J}_{y_2} - \dot{J}_{x_2}) \cdot \omega_{x_2} \cdot \omega_{y_2} = M_{z_2}^e; \quad (6)$$

где  $m$  — масса платформы и оборудования;  $x_c, y_c, z_c$  — координаты центра масс платформы относительно осей основной системы;  $F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$  — проекции внешних сил, действующих на платформу на оси  $x, y, z$  соответственно;  $\dot{J}_{x_2}, \dot{J}_{y_2}, \dot{J}_{z_2}$  — моменты инерции платформы относительно осей  $x_2, y_2, z_2$ ;  $\omega_{x_2}, \omega_{y_2}, \omega_{z_2}$  — скорости вращения тела относительно осей  $x_2, y_2, z_2$ ;  $M_{x_2}^e, M_{y_2}^e, M_{z_2}^e$  — моменты внешних сил относительно осей  $x_2, y_2, z_2$ .

Поскольку неизвестными являются три абсолютные, координаты центра масс  $x_c, y_c, z_c$  и три угла Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$ , необходимо составить кинематические уравнения Эйлера

$$\omega_{x_2} = \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cdot \sin \varphi, \quad (7)$$

$$\omega_{y_2} = \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - \dot{\theta} \cdot \sin \varphi, \quad (8)$$

$$\omega_{z_2} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos \theta. \quad (9)$$

Задачей математического описания объекта регулирования является составление и решение уравнений (1) — (9) с целью определения собственных и несобственных передаточных функций объекта регулирования, равных отношениям изображений приращений зазоров электромагнитов к вызвавшим их приращениям сил.

Рассмотрим некоторые технологические особенности объекта регулирования, позволяющие упростить решение уравнений (1) — (9). Так как перемещения платформы в горизонтальной плоскости, не совпадающие с направлением ее основного движения, ограничиваются системой боковой стабилизации и восстанавливающим усилием электромагнитов подвеса, работающих на «сдвиг», а вращающий момент в (6) мал, т. к. угол  $\theta \ll 0,001$ , и учитывая, что составляющая переносной скорости в выражении (6) незначительна вследствие малого



различия величин  $\dot{J}_{x_2}$  и  $\dot{J}_{y_2}$ , можно считать, что углы  $\varphi$  и  $\psi$  примерно постоянны. При этом (7) — (9) принимают вид:

$$\omega_{x_2} = \dot{\Theta} \cos \varphi, \quad (10)$$

$$\omega_{y_2} = -\dot{\Theta} \cdot \sin \varphi, \quad (11)$$

$$\omega_{z_2} = 0. \quad (12)$$

После подстановки конкретных сил и моментов, действующих на экипаж в зависимости от числа и расположения электромагнитов в (1) — (6) с учетом (10) — (12), при предположении о равномерности распределения оборудования на платформе были получены собственные и несобственные передаточные функции и составлены передаточные матрицы объекта регулирования для различного числа точек подвеса, согласно методике, описанной в [9]. Эти передаточные матрицы имеют следующий вид:

$$\bar{W}_0 = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1} & W_{n2} & \dots & W_{nn} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где  $W_{11}, W_{22}, \dots, W_{nn}$  — собственные передаточные функции объекта регулирования, равные отношениям изображений приращений зазоров к вызвавшим их приращениям сил собственных электромагнитов, т. е.

$$W_{ii}(p) = \frac{\Delta Z_{ii}(p)}{\Delta F_i(p)}, \quad (14)$$

( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Недиагональные элементы  $W_{ik}$  — передаточные функции перекрестных связей, определяющие долю участия несобственных входных сигналов в формировании выходной величины. Эти элементы равны отношениям изображений приращений зазоров к приращениям несобственных сил, их вызвавшим

$$W_{ik}(p) = \frac{\Delta Z_{ik}(p)}{\Delta F_k(p)}, \quad (15)$$

$$(k=1, 2, \dots, n) \quad i \neq k.$$

Передаточные матрицы объекта регулирования при изменении числа точек подвеса от 2 до 6:

а) для двухточечного подвеса на электромагнитах 7ЭМ, 8ЭМ

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{mp^2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}; \quad (16)$$

б) для четырехточечного подвеса на электромагнитах 1ЭМ, 2ЭМ, 5ЭМ, 6ЭМ

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{mp^2} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \quad (17)$$

в) для трехточечного подвеса на электромагнитах 1ЭМ, 5ЭМ, 6ЭМ (аварийный режим четырехточечного подвеса, без учета начальных условий).

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{mp^2} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 1 & 7 & 1 \\ -5 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \quad (18)$$

г) для шеститочечного подвеса на электромагнитах 1ЭМ, 2ЭМ, 3ЭМ, 4ЭМ, 5ЭМ, 6ЭМ

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{mp^2} \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & -5 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & -7 & 1 & -2 & -5 \\ -5 & -2 & 1 & 7 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -5 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}; \quad (19)$$

д) для пятиточечного подвеса на электромагнитах 1ЭМ, 2ЭМ, 3ЭМ, 5ЭМ, 6ЭМ (аварийный режим шеститочечного подвеса)

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{mp^2} \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 7 & 1 & -5 \\ -5 & -2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \quad (20)$$

е) для пятиточечного подвеса на электромагнитах 1ЭМ, 3ЭМ, 4ЭМ, 5ЭМ, 6ЭМ (аварийный режим шеститочечного подвеса)

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{mp^2} \begin{vmatrix} 7 & 4 & -5 & -2 \\ 4 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 7 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 4 \end{vmatrix}. \quad (21)$$



В аварийных режимах при выходе из строя локальных систем автоматического регулирования зазоров электромагнитов общая масса экипажа и оборудования остается неизменной.

## 2. Характеристические уравнения

Исследования динамики взаимосвязанной системы проводились путем анализа распределения корней характеристических уравнений на комплексной плоскости.

Поскольку передаточные матрицы всех звеньев взаимосвязанной системы, за исключением объекта регулирования, являются диагональными, характеристические уравнения этой системы можно выразить через передаточную функцию разомкнутой локальной системы в следующем виде:

а) для двухточечного подвеса объекта с передаточной матрицей (16)

$$|\bar{E} + \bar{W}_p| = \begin{vmatrix} 1 + 4W_p & -2W_p \\ -2W_p & 1 + 4W_p \end{vmatrix} = 12W_p^2 + 8W_p + 1 = 0; \quad (22)$$

б) для четырехточечного подвеса объекта с передаточной матрицей (17)

$$|\bar{E} + \bar{W}_p| = \begin{vmatrix} 1 + 7W_p & W_p & -5W_p & W_p \\ W_p & 1 + 7W_p & W_p & -5W_p \\ -5W_p & W_p & 1 + 7W_p & W_p \\ W_p & -5W_p & W_p & 1 + 7W_p \end{vmatrix} =$$

$$= 576W_p^3 + 240W_p^2 + 28W_p + 1 = 0; \quad (23)$$

в) для трехточечного подвеса объекта с передаточной матрицей (18)

$$|\bar{E} + \bar{W}_p| = \begin{vmatrix} 1 + 7W_p & W_p & -5W_p \\ W_p & 1 + 7W_p & W_p \\ -5W_p & W_p & 1 + 7W_p \end{vmatrix} =$$

$$= 144W_p^3 + 120W_p^2 + 21W_p + 1 = 0; \quad (24)$$

г) для шеститочечного подвеса объекта с передаточной матрицей (19)

$$|\bar{E} + \bar{W}_p| = \begin{vmatrix} 1+7W_p & 4W_p & W_p & -5W_p & -2W_p & W_p \\ 4W_p & 1+4W_p & 4W_p & -2W_p & -2W_p & -2W_p \\ W_p & 4W_p & 1+7W_p & W_p & -2W_p & -5W_p \\ -5W_p & -2W_p & W_p & 1+7W_p & 4W_p & W_p \\ -2W_p & -2W_p & -2W_p & 4W_p & 1+4W_p & 4W_p \\ W_p & -2W_p & -5W_p & W_p & 4W_p & 1+7W_p \end{vmatrix} =$$

$$= 1296 W_p^3 + 396 W_p^2 + 36 W_p + 1 = 0; \quad (25)$$

д) для пятиточечного подвеса объекта с передаточной матрицей (20)

$$|\bar{E} + \bar{W}_p| = \begin{vmatrix} 1+7W_p & 4W_p & W_p & -5W_p & W_p \\ 4W_p & 1+4W_p & 4W_p & -2W_p & -2W_p \\ W_p & 4W_p & 1+7W_p & W_p & -5W_p \\ -5W_p & -2W_p & W_p & 1+7W_p & W_p \\ W_p & -2W_p & -5W_p & W_p & 1+7W_p \end{vmatrix} =$$

$$= 864 W_p^3 + 312 W_p^2 + 32 W_p + 1 = 0; \quad (26)$$

е) для пятиточечного подвеса объекта с передаточной матрицей (21)

$$|\bar{E} + \bar{W}_p| = \begin{vmatrix} 1+7W_p & 4W_p & W_p & -5W_p & -2W_p \\ 4W_p & 1+4W_p & 4W_p & -2W_p & -2W_p \\ W_p & 4W_p & 1+7W_p & W_p & -2W_p \\ -5W_p & -2W_p & W_p & 1+7W_p & 4W_p \\ -2W_p & -2W_p & -2W_p & 4W_p & 1+4W_p \end{vmatrix} =$$

$$= 540 W_p^3 + 240 W_p^2 + 29 W_p + 1 = 0. \quad (27)$$

Здесь обозначены:  $\bar{W}_p$  — передаточная матрица разомкнутой взаимосвязанной системы;  $\bar{E}$  — единичная матрица того же размера, что и  $\bar{W}_p$ .

Передаточная функция разомкнутой локальной системы была получена в [6] и обобщенно может быть представлена в следующем виде:

$$W_p = \frac{(k_p T_1 - k_2 T_2)p + k_p - k_1}{m[T_{эл} \cdot T_2 \cdot p^4 + (T_{эл} + T_2)p^3 + p^2]}, \quad (28)$$

где  $k_p$  — коэффициент передачи разомкнутой локальной системы в направлении прямого прохождения сигнала;

$k_1$  — коэффициент передачи, учитывающий наличие внутренней положительной обратной связи по зазору электромагнита;



$T_1$  и  $T_2$  — постоянные времени корректирующего звена;

$T_{эл}$  — постоянная времени обмотки электромагнита.

Для анализа устойчивости взаимосвязанной системы был применен критерий Михайлова-Найквиста, но вместо точки комплексной плоскости  $(-1; j0)$ , которая соответствует обычной записи характеристического уравнения локальной системы  $W_p + 1 = 0$ , рассматривались точки с координатами  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  [10], соответствующие корням характеристических уравнений (22) — (27) взаимосвязанной системы.

Такой подход к исследованию устойчивости взаимосвязанной системы поясняется возможностью записи ее характеристических уравнений в следующей форме:

$$(W_p - \lambda_1)(W_p - \lambda_2)(W_p - \lambda_3) = 0, \quad (29)$$

что позволяет при исследовании устойчивости рассматривать ряд независимых друг от друга уравнений:

$$W_p - \lambda_1 = 0; \quad W_p - \lambda_2 = 0; \quad W_p - \lambda_3 = 0. \quad (30)$$

### 3. Анализ устойчивости

Для исследования устойчивости сравниваемых вариантов многоточечного электромагнитного подвеса были определены корни характеристических уравнений (22) — (27). Результаты расчетов обобщены в виде таблицы, где представлены схемы расположения электромагнитов на платформе, корни характеристических уравнений и соответствующие этим корням характерные точки комплексной плоскости. Под характерными здесь понимаются точки комплексной плоскости, охват которых амплитудно-фазовой частотной характеристикой разомкнутой локальной одноточечной системы соответствует неустойчивому режиму взаимосвязанной системы.

Координаты характерных точек совпадают со значениями корней характеристических уравнений (22) — (27) в случае, если при различном числе точек подвеса масса экипажа сохраняется неизменной.

Для определения координат характерных точек в случае увеличения массы платформы пропорционально числу точек подвеса корни характеристических уравнений умножались на число точек подвеса. Такое преобразование позволило произвести сравнение всех вариантов подвеса в равных условиях, а именно — с одноточечным подвесом, и объясняется тем, что при увеличении массы платформы увеличивается, как это вид-



но из (28), знаменатель передаточной функции разомкнутой локальной системы. Для сохранения значения передаточной функции неизменным ее числитель следует умножить на число точек подвеса, что, в свою очередь, в соответствии с (29) и (30), вызывает необходимость умножения на число точек подвеса корней характеристических уравнений взаимосвязанной системы. Из сказанного также следует, что при исследовании устойчивости подвеса в аварийных режимах корни характеристических уравнений нужно умножать на число точек подвеса в нормальном режиме работы.

№ п/п	Число точек подвеса	Схема расположения электромагнитов на платформе	Корни характеристического уравнения взаимосвязанной системы			Координаты характерных точек, ближайших к мнимой оси	
			$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	при неизменной массе платформы	при массе платформы, пропорциональной числу точек подвеса
1	2	эскиз № 1	$-\frac{1}{2}$	—	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}; j0$	$-\frac{1}{3}; j0$
2	4	эскиз № 2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}; j0$	$-\frac{1}{3}; j0$
3	3	эскиз № 3	$-\frac{1}{1,63}$	$-\frac{1}{7,35}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}; j0$	$-\frac{1}{3}; j0$
4	6	эскиз № 4	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{18}; j0$	$-\frac{1}{3}; j0$
5	5	эскиз № 5	$-\frac{1}{4,8}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{15,3}$	$-\frac{1}{15,3}; j0$	$-\frac{1}{2,55}; j0$
6	5	эскиз № 6	$-\frac{1}{3,7}$	$-\frac{1}{9,2}$	$-\frac{1}{16,3}$	$-\frac{1}{16,3}; j0$	$-\frac{1}{2,7}; j0$
7	$N$ (четное)	эскиз № 7	$-\frac{1}{N}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3N}$	$-\frac{1}{3N}; j0$	$-\frac{1}{3}; j0$

Преимущество использования характерных точек состоит в том, что их координаты определяются свойствами объекта регулирования, числом точек подвеса и расположением электромагнитов и не зависят от параметров и структуры локальных систем автоматического регулирования зазоров электро-



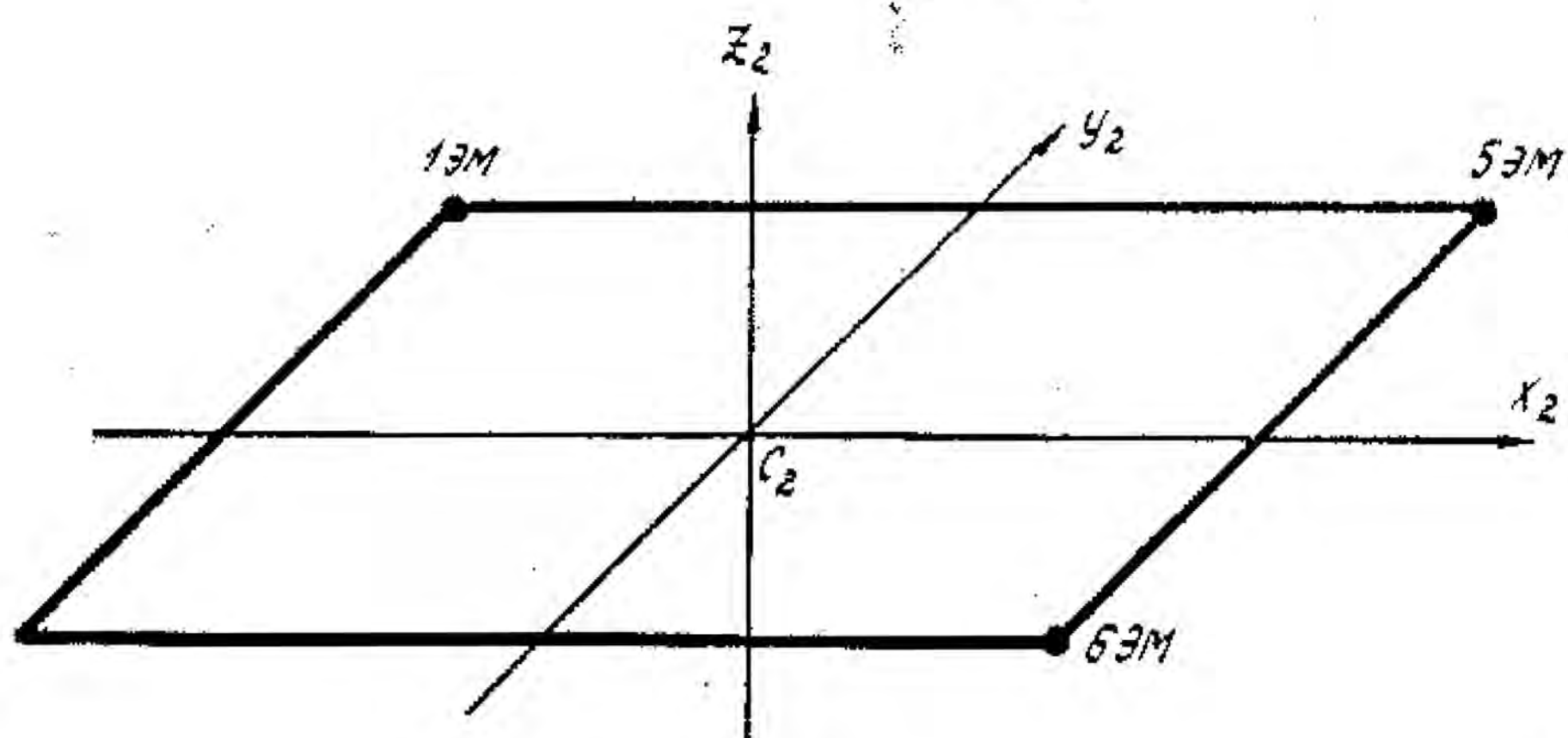
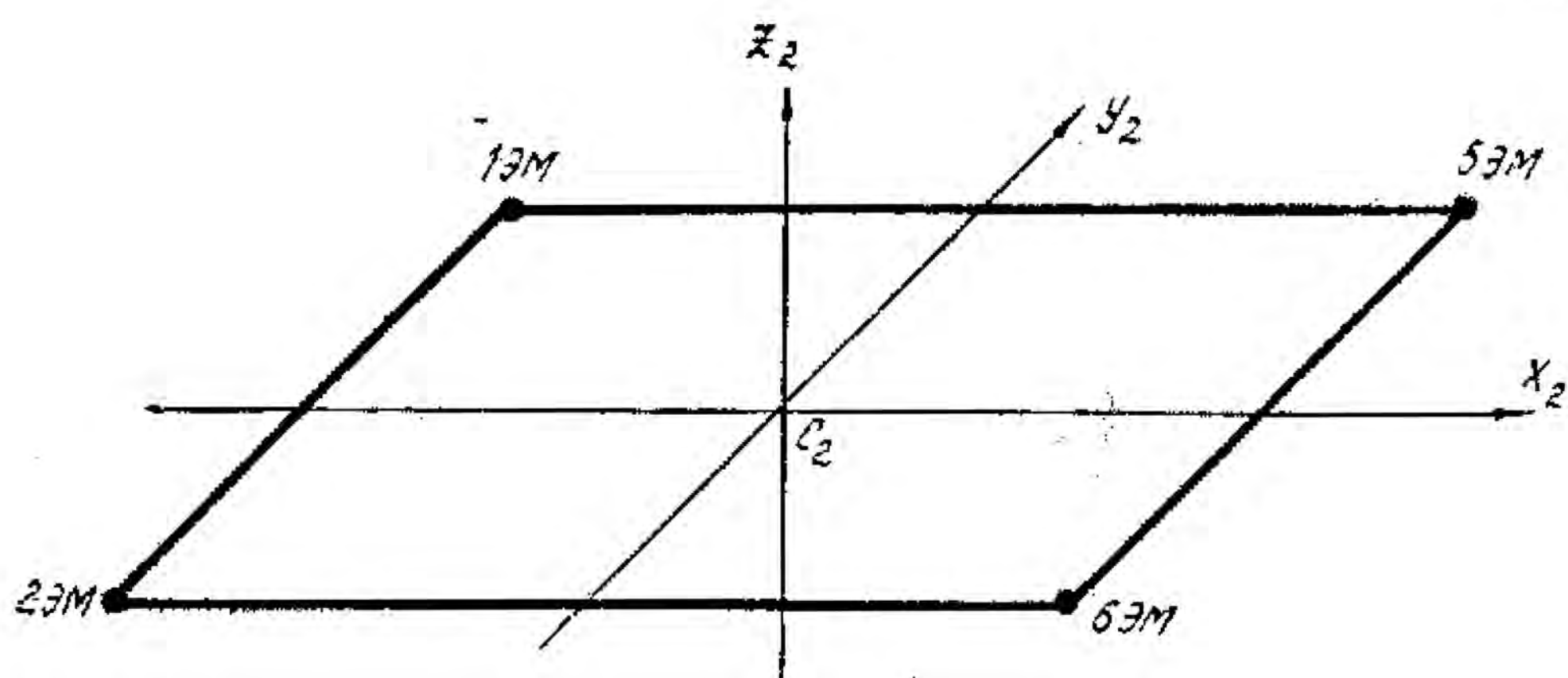
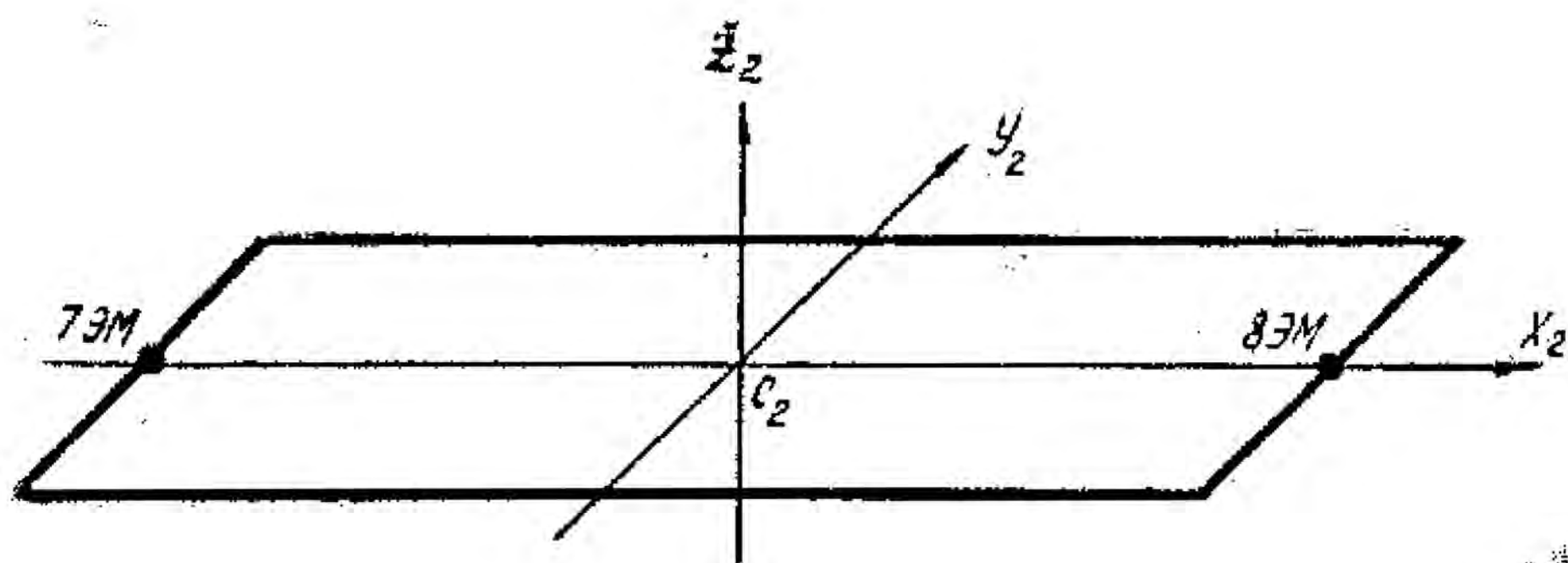


Рис. 2. Эскиз № 1  
Эскиз № 2  
Эскиз № 3



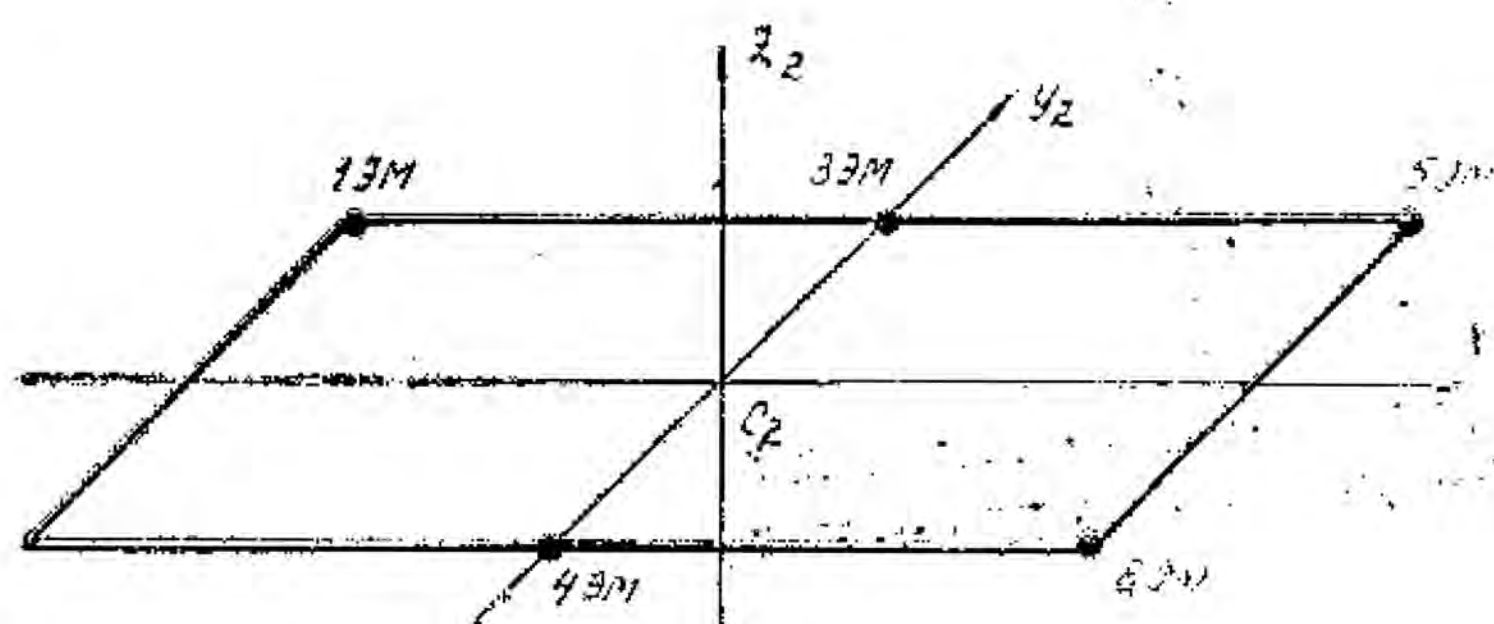
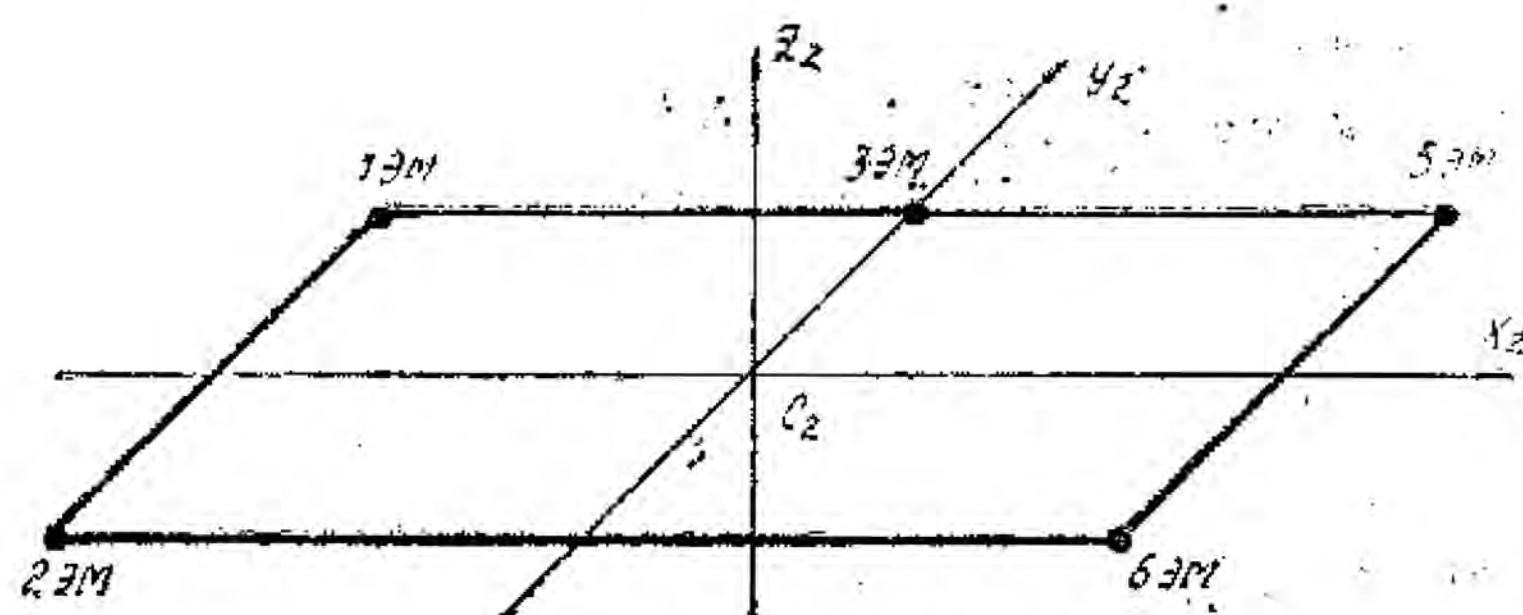
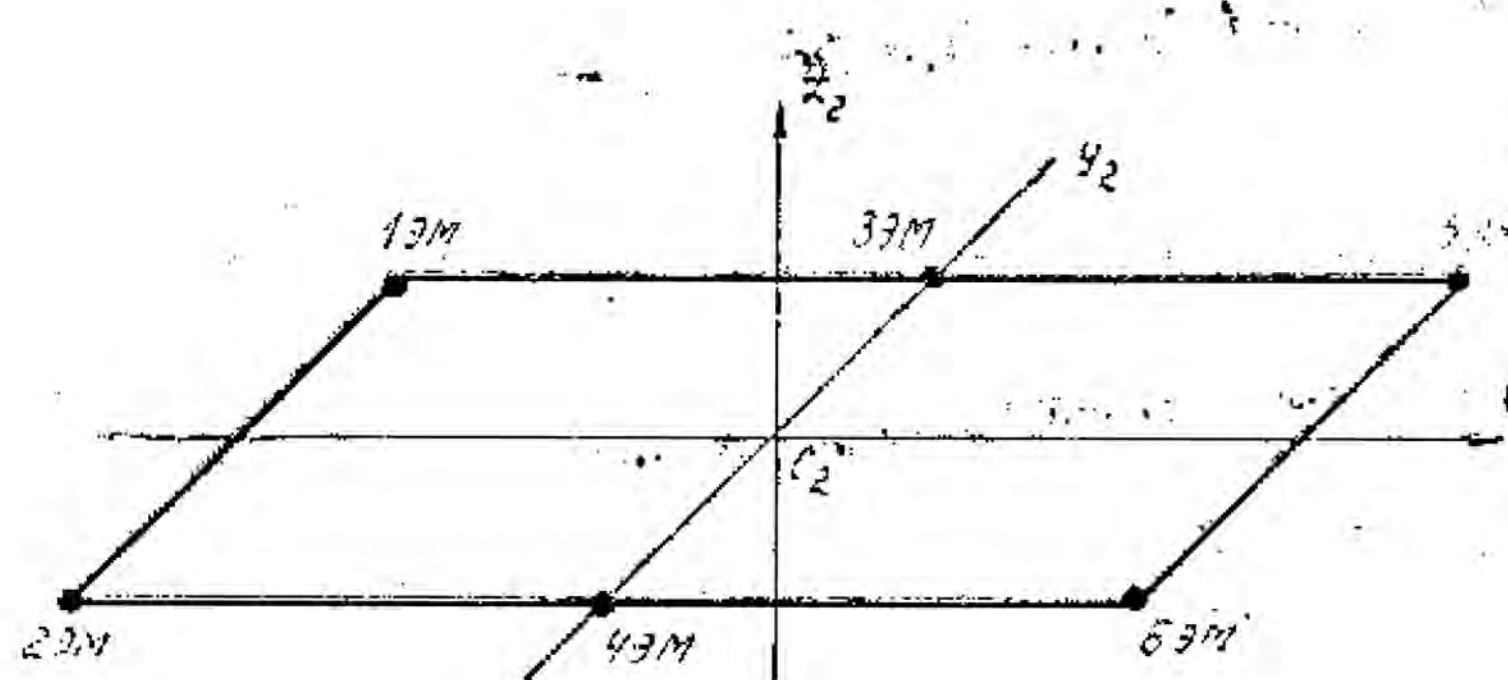


Рис. 3. Эскиз № 4  
Эскиз № 5  
Эскиз № 6

магнитов. Поэтому полученные результаты могут быть использованы для выбора рационального числа, грузоподъемности и расположения электромагнитов на платформе при проектировании непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования положения экипажа в пространстве, а также систем комбинированного и электродинамического подвеса.



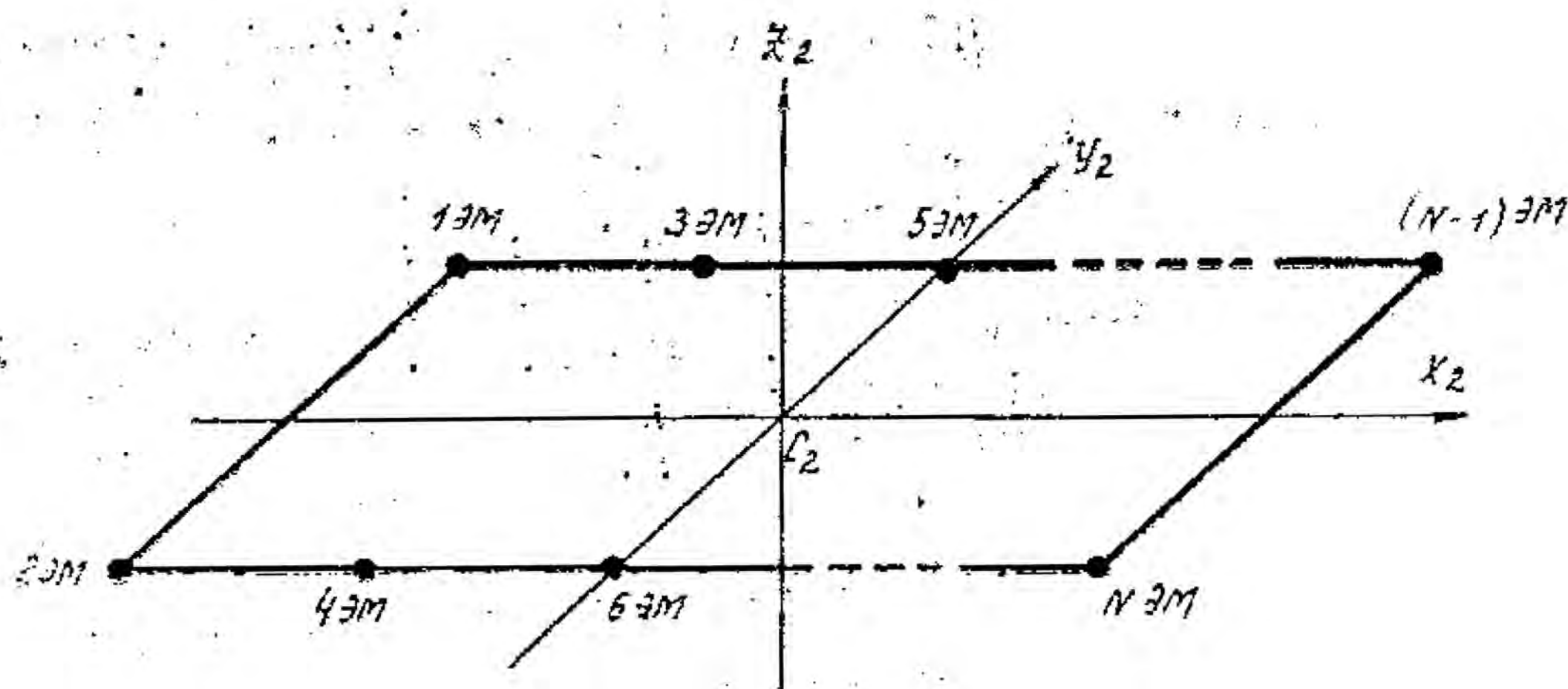


Рис. 4. Эскиз №7

### Выводы

Результаты исследований системы многоточечного магнитного подвеса транспортного экипажа позволили сопоставить различные варианты подвеса, отличающиеся числом и расположением электромагнитов, и сделать выводы, определяющие рациональное размещение и использование этих электромагнитов:

1) увеличение числа точек подвеса при сохранении симметричного их расположения (относительно продольной оси платформы) и постоянства массы объекта регулирования при неизменных параметрах локальных САР зазоров снижает запас устойчивости системы подвеса; увеличения запаса устойчивости можно достигнуть, уменьшая число точек подвеса при сохранении прежней массы объекта регулирования путем повышения грузоподъемности единичных электромагнитов или объединения последних по 2—3 в группы с общей системой автоматического регулирования зазора;

2) увеличение числа точек подвеса при сохранении симметричного их расположения и пропорциональном увеличении массы объекта регулирования не снижает запаса устойчивости системы подвеса, однако запас устойчивости каждой локальной системы авторегулирования меньше, чем таковой при ее работе в одноточечной схеме подвеса или при отсутствии перекрестных связей;

3) аварийные режимы многоточечного подвеса приводят к перегрузке электромагнитов; при этом устойчивость подвеса в этих режимах не нарушается.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Бышков Ю. Д., Иванов В. И. Магнитные опоры в автоматике. — М.: Энергия, 1978.
  2. Метлин В. Б. Магнитные и магнитогидродинамические опоры: Обзор. — М.: Энергия, 1968. — 191 с.
  3. Yamamura Sakde. Performance analysis of electromagnetically levitated vehicle: Paper 40/WELC, June 21—25, 1977 Section 7, — M. 1977. — 28 с.
  4. Шаповаленко А. Г., Гаврилюк В. А., Зукни П. П. Анализ систем магнитных опор устройств электрической тяги, высокоскоростного наземного транспорта и выбор направлений дальнейших разработок. — Изв. вузов. Электромеханика, 1977, № 8, с. 879—881.
  5. Пивень Л. З. Об устойчивости магнитного подвеса со стабилизатором. — Проблемы технической электродинамики, 1970, № 24, с. 175—178.
  6. Теряев В. И. Система автоматического регулирования положения транспортного экипажа при магнитном подвешивании. Реф. информация о н.-и. работах в вузах Украинской ССР, "Электромеханика", 1978, № 10, с. 9-10.
  7. Java wan I B. V. Dynamical Aspects of Passenger Carrying Vehicles using Controlled D. S. Electromagnets- — Vehicles System Dynamics, 1977 V 6, Ms 2 - 3 , p. 177—182.
  8. Gottzein E., Miller L., Meisinger R, Magnetic suspension control system for high speed ground transportation vehicles: Paper 07/WELC, June 21 -25 . 1977, Section 7. — M., 1977. — 12 с.
  9. Попович Н. Г., Теряев В. И. Динамика платформы высокоскоростного транспортного экипажа при магнитном подвешивании. — Вестн. Киев, политехн, ин-та. Электроэнергетика, 1979, вып. 16, с. 46-49.
  10. Бесекерский В. Л., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1972—767 с.
-